CONTRIBUTION A DEUX PROBLEMES, CONCERNANT LES FONCTIONS DE LA CLASSE A

PAR

J.-P. KAHANE ET Y. KATZNELSON*

En souvenir de R. SALEM

ABSTRACT

Construction explicite d'une fonction de la classe $A = F(l^1)$ lipschitzienne d'ordre $\alpha > 0$, ne satisfaisant pas la synthèse spectrale.

Nouveaux exemples d'ensembles qui ne sont pas de résolution au sens de Malliavin (en particulier, l'ensemble triadique de Cantor).

Nouveaux examples d'ensembles E telles que les seules fonctions d'une variable réelle opérant dans l'algèbre $A(E)$ des restrictions a E des fonctions de la clesse A, soient les fonctions analytiques.

Introduction. Par fonctions de la classe A nous entendons les fonctions sommes de séries de Fourier absolument convergentes

$$f(t) = \sum \hat{f}(n) e^{int}$$

(sauf avis contraire, $\sum =$ somme prise sur tous les entiers). Elles constituent une algèbre de Banach, avec la norme

$$\|f\|_1 = \sum |\hat{f}(n)|.$$

Les pseudomesures, c'est à dire les distributions à coefficients de Fourier bornés

$$h(t) \sim \sum \hat{h}(n) e^{int}$$

définissent sur l'espace de Banach A des formes linéaires

$$f \to \frac{1}{2\pi} \int f(t) h(t) dt = \sum \hat{f}(n) \hat{h}(-n)$$

(sauf avis contraire, $\int =$ intégrale sur le cercle), et forment un espace de Banach A_∞, avec la norme

$$\| h \|_\infty = \sup_n |\hat{h}(n)|.$$

Nous appellerons pseudofonctions les pseudomesures dont les coefficients de Fourier tendent vers zéro à l'infini.

Nous nous occuperons de deux problèmes, qui font déjà l'objet d'une abondante littérature.

Problème de synthèse. On donne un ensemble fermé E, une fonction $f \in A$, une pseudomesure h. Les hypothèses

Received June 19, 1963

* The research reported in this document has been sponsored in part by the Air Force office of Scientific Research, OAR through the European Office, Aerospace Research, United States Air Force".

$$(H) \begin{cases} f \text{ nulle sur } E \\ h \text{ portée par } E \end{cases}$$

entrainent-elles la conclusion

$$\text{(C)} \quad \int h(t)f(t)dt = 0\,?$$

On a les éléments de réponse suivants:

Si f satisfait une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha \geqq \frac{1}{2}$, (H) entraine (C) [14].

Si h est une mesure, (H) entraine (C).

Si E a une frontière dénombrable, ou si E est un ensemble triadique de Cantor, ou si E ne porte aucune pseudomesure qui ne soit une mesure, (H) entraine (C) [1, 2, 3, 6, 13].

Cependant, comme Malliavin l'a montré en 1959, la réponse au problème général est négative [11]: il existe une fonction f réelle, $\in A$, et une pseudomesure h portée par l'ensemble des zéros de f (formellement, $h = \delta'(f)$, δ' étant la dérivée de la mesure de Dirac), telles que (C) n'ait pas lieu.

La construction de f, faite par Malliavin, est assez difficile. On peut la remplacer par un théorème d'existence, en utilisant une méthode probabiliste; on montre ainsi qu'il existe des f satisfaisant une condition de Lipschitz d'ordre positif, telles que (H) n'entraine pas (C) [4]. Dans le premier paragraphe, nous retrouverons ce résultat par une construction explicite, qui nous parait être la démonstration la plus simple du théorème de Malliavin.

Si F est un fermé tel que les hypothèses (H) et $E \subset F$ entrainent (C), on dit suivant Malliavin que F est un ensemble de résolution. Récemment [12], Malliavin a montré qu'un ensemble fermé "de multiplicité", c'est à dire portant une pseudofonction $T \neq 0$, n'est jamais un ensemble de résolution; l'idée est de définir formellement $h = T \cdot \delta'(f)$, de sorte que le support de h soit à la fois contenu dans le support de T et dans celui de $\delta'(f)$.

Nous donnerons un critère pour que F soit un ensemble de résolution, montrant que non seulement tout ensemble de multiplicité, mais certains ensembles "d'unicité", comme l'ensemble de Cantor, ne sont pas ensembles de résolution.

Problème du calcul opératoire. Etant donné une classe $\mathfrak{C}$ de fonctions numériques, on dit qu'une fonction F opère *dans* $\mathfrak{C}$ si, pour toute $f \in \mathfrak{C}$ à valeurs dans l'ensemble de définition de F, la fonction composée $F \circ f$ appartient à $\mathfrak{C}$. Dans la suite, on se restreint à des fonctions F définies sur un ouvert de la droite réelle.

On sait depuis Wiener et Lévy que les fonctions analytiques opèrent dans A. On a montré en 1958 la réciproque, c'est à dire que seules les fonctions analytiques opèrent dans A [7].

On a cherché à généraliser ce résultat en remplaçant A par $A(E)$, l'algècre des restrictions des $f \in A$ à un ensemble fermé E donné. Comme $A(E)$ a une structure d'algèbre de Banach, les fonctions analytiques opèrent dans $A(E)$. La réciproque a lieu si E contient des progressions arithmétiques arbitrairement riches [5], ou, plus généralement, des "mailles" arbitrairement riches (une "maille" de 2^k éléments étant un ensemble de 2^k points de la forme $\pm u_1 \pm \dots \pm u_k$) [9]. Par contre, pour certains ensembles E ("ensembles de Helson") toutes les fonctions continues opèrent.

Nous donnerons un critère général pour la réciproque du théorème de Lévy, et nous montrerons qu'elle est satisfaite pour $A(E)$ dans des cas assez étendus.

Nous laissons ouverte la conjecture selon laquelle tout E fermé est soit ensemble de Helson ($A(E)$ étant l'ensemble de toutes les fonctions continues sur E), soit ensemble "d'analyticité" dans le sens que seules les fonctions analytiques opèrent dans $A(E)$.

Première partie.

Nous allons d'abord donner, par une construction explicite, une nouvelle démonstration du théorème suivant, déjà connu [4].

Théorème 1. *Il existe une $f \in A$, satisfaisant une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$, et une $h \in A_\infty$ portée par l'ensemble des zéros de f, telles que* $\int h(t)f(t)dt \neq 0$.

On s'appuiera, comme toujours, sur la proposition suivante de Malliavin [11].

Proposition 1. *Supposons $f \in A$, f réelle, et*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u| \; \| e^{iuf} \|_\infty du < \infty.$$

Alors l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} iu \, e^{iu(f(t)-a)} du,$$

convergente dans A_∞, définit pour tout a réel une pseudomesure h_a, portée par l'ensemble des zéros de $f(t) - a$, et telle que, pour une infinité de valeurs de a,

$$\int h_a(t)(f(t) - a)dt \neq 0.$$

Le théorème 1 résultera donc de la construction d'une $f \in A$, réelle, lipschitzienne d'ordre $\alpha > 0$, telle que

$$\| e^{iuf} \|_\infty = \underset{u \to \infty}{O}(u^{-N}) \qquad (N \text{ donné} > 2). \tag{1}$$

Nous construirons f sous la forme

$$f(t) = \sum_1^\infty a_n \Delta(k_n t)$$

où $\Delta(t)$ est la fonction 2π-périodique, égale à $t^2/2$ dans $[-\pi, \pi]$, $\{k_n\}$ une suite d'entiers croissants, et $\{a_n\}$ une suite positive sommable, qui seront déterminés plus tard. On utilisera les lemmes suivants.

LEMME 1. *Posons*

$$p_\lambda(u) = \frac{1}{2\pi}\int e^{iu\Delta(t)}e^{-i\lambda t}dt \qquad (u > 0). \tag{2}$$

Alors

$$|p_\lambda(u)| \leqq \frac{2}{\pi\sqrt{u}}. \tag{3}$$

Démonstration élémentaire, ou par application du lemme de Van der Corput [15, vol I, p. 197].

LEMME 2. *Soit ϕ une fonction à variation bornée, $\psi \in L^2$, k un entier positif, μ un entier tel que $|\mu| \leqq k/2$. Posons*

$$\frac{1}{2\pi}\int \phi(t)\psi(kt)e^{-i\mu t}dt = \frac{1}{2\pi}\int \phi(t)e^{-i\mu t}dt\,\frac{1}{2\pi}\int \psi(t)dt + Y. \tag{4}$$

Alors

$$|Y| < \frac{C}{k}\mathrm{Var}(\phi)\,\|\psi\|_2 \qquad \left(C = \frac{1}{2\pi}\left(2\sum_1^\infty \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{5}$$

Démonstration. (4) s'écrit

$$\sum \hat{\psi}(-n)\hat{\phi}(nk+\mu) = \hat{\psi}(0)\,\hat{\phi}(\mu) + Y$$

donc

$$|Y| \leqq \Big(\sum_{n\neq 0} |\hat{\psi}(-n)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n\neq 0} |\hat{\phi}(nk+\mu)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$|\hat{\phi}(nk+\mu)| \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{Var}(\phi)}{|nk+\mu|} \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{Var}(\phi)}{k(|n|-\frac{1}{2})}$$

$$\sum_{n\neq 0}|\hat{\phi}(nk+\mu)|^2 \leqq \left(\frac{\mathrm{Var}(\phi)}{2\pi k}\right)^2 2\sum_1^\infty \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} = \left(\frac{C\,\mathrm{Var}(\phi)}{k}\right)^2$$

d'où résulte le lemme.

LEMME 3. *Soit $\{k_n\}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs $(n = 1, 2, \cdots)$ avec $k_1 = 1$. Tout entier m s'écrit*

$$m = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots \quad (\textit{somme finie}) \tag{6}$$

ou les λ_j sont des entiers relatifs, tels que, pour tout j,

$$|\lambda_1 k_1 + \cdots + \lambda_j k_j| \leqq \tfrac{1}{2}k_{j+1}. \tag{7}$$

On posera dans la suite $\mu_j = \lambda_1 k_1 + \cdots + \lambda_j k_j$.

Démonstration. S'il en est ainsi pour $|m| \leqq k_n/2$ avec $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = 0$, (c'est le cas pour $n = 1$) il en est encore ainsi pour $|m| \leqq k_{n+1}/2$ avec $\lambda_{n+1} = \cdots = 0$; en effet, il suffit d'écrire alors $m = \lambda_n k_n + m'$ avec $|m'| \leqq k_n/2$.

Pour simplifier les calculs à venir, imposons dès maintenant aux k_n et aux a_n les conditions suivantes:

$$k_n \text{ divise } k_{n+1} \tag{8}$$

$$\sum_1^{n-1} a_j k_j \leqq a_n k_n. \tag{9}$$

Posons

$$f_n(t) = \sum_1^n a_j \Delta(k_j t) \tag{10}$$

$$X_{n,\mu}(u) = \frac{1}{2\pi} \int e^{iuf_n} e^{-i\mu t} dt. \tag{11}$$

On écrira $f(t)$ pour $f_\infty(t)$, et $X_\mu(u)$ pour $X_{\infty,\mu}(u)$.

Pour chaque entier m, les λ_j et μ_j auront même sens que dans le lemme 3.

Appliquons le lemme 2 dans les deux cas suivants:

$$\begin{cases} k = k_{n+1} \qquad \mu = \mu_n \qquad \phi(t) = e^{iuf_n(t)} \\ \psi(t) = e^{iua_{n+1}\Delta(t)} e^{-i\lambda_{n+1} t} \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} k = k_{n+1} \qquad \mu = \mu_n \qquad \phi_t = e^{iuf_n(t)} \\ \psi(k_{n+1} t) = e^{iu(f-f_n)} e^{-i(m-\mu_n)t} \quad \text{(possible grâce à (8)).} \end{cases} \tag{13}$$

Tenant compte de

$$\mathrm{Var}(e^{iuf_n}) = \mathrm{Var}(uf_n) \leqq u\pi^2 \sum_1^n a_j k_j \leqq 2u\pi^2 a_n k_n \text{ (à cause de (9))}$$

on obtient respectivement, dans les cas (12) et (13)

$$|X_{n+1,\mu_{n+1}}(u)| \leqq |X_{n,\mu_n}(u)| \, |p_{\lambda_{n+1}}(a_{n+1}u)| + 2\pi^2 Cu \frac{a_n k_n}{k_{n+1}} \tag{14}$$

$$|X_m(u)| \leqq |X_{n,\mu_n}(u)| + 2\pi^2 Cu \frac{a_n k_n}{k_{n+1}}. \tag{15}$$

Pour u donné, nous nous servons de manière répétée de (14) pour $n = s, s+1, \cdots q-1$, et de (15) pour $n = q$, les entiers s et q restant à déterminer en fonction de u; nous obtenons (les p_λ étant tous de module $\leqq 1$)

$$|X_m(u)| \leqq |X_{s,\mu_s}| \prod_{j=s}^{q-1} |p_{\lambda_{j+1}}(a_{j+1}u)| + 2\pi^2 Cu \sum_s^q \frac{a_j k_j}{k_{j+1}}$$

donc, en tenant compte de $|X_{s,\mu_s}| \leqq 1$ et de (3),

$$|X_m(u)| \leqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{q-s} (a_{s+1} \cdots a_q u^{q-s})^{-\frac{1}{2}} + 2\pi^2 Cu \sum_s^q \frac{a_j k_j}{k_{j+1}}.$$

Comme $X_m(u)$ est le m-ième coefficient de Fourier de e^{iuf}, on a

$$(16) \qquad \| e^{iuf} \|_\infty \leqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{q-s} (a_{s+1} \cdots a_q u^{q-s})^{-\frac{1}{2}} + C'u \sum_s^q \frac{a_j k_j}{k_{j+1}} \quad (C' = 2\pi^2 C)$$

sous les conditions (8) et (9).

Choissons maintenant (ce qui est compatible avec (8) et (9))

$$(17) \qquad k_n = 2^{A2^n} \quad a_n = 2^{-2^n} \quad (A \text{ entier} > 1, \; n \geqq 2).$$

Posons $u = 2^{2^\kappa}$ (κ réel), et choisissons, pour u assez grand,

$$q = [\kappa] \qquad q - s = 2l \qquad (l \text{ entier} > 0)$$

Alors

$$a_{s+1} \cdots a_q u^{q-s} \geqq 2^{-2 \cdot 2^q + (q-s)2^\kappa} \geqq u^{2l-2}$$

$$\sum_s^q \frac{a_j k_j}{k_{j+1}} = \sum_s^q 2^{-(A+1)2^j} \leqq 2 \cdot 2^{-(A+1)2^s} \leqq 2u^{-(A+1)2^{-2l-1}}$$

Il suffit donc de prendre, en fonction de N, $l = N + 1$ et A de sorte que

$$(A + 1)2^{-2l-1} \geqq N + 1$$

pour avoir la condition (1) cherchée:

$$\| e^{iuf} \|_\infty = \underset{u \to \infty}{O}(u^{-N}).$$

La fonction $f(t) = \sum_1^\infty a_n \Delta(k_n t)$ satisfait d'ailleurs une condition de Lipschitz d'ordre $1/2A$, puisque, lorsque $k_{n+1}^{-1} \leqq h < k_n^{-1}$,

$$|f(t + h) - f(t)| \leqq \pi h \sum_{j=1}^n a_j k_j + 2 \sum_{j=n+1}^\infty a_j \leqq C'' a_n \leqq C'' h^{1/2A}$$

C'' constante. Cela achève la démonstration du Théorème 1.

Par un choix différent des a_n et k_n, l'inégalité (16) donne d'autres estimations intéressantes de $\| e^{iuf} \|_\infty$. Par exemple, la suite $\{a_n\}$ étant donnée décroissante vers zéro, définissons la *fonction associée* à $\{a_n\}$ comme

$$(18) \qquad A(u) = \sup_n (a_1 a_2 \cdots a_n u^n).$$

Pour tout u assez grand, définissons $q = q(u)$ par $a_{q+1} u \leqq 1 < a_q u$. Il est clair que $A(u) = a_1 \cdots a_q u^q$. Soit maintenant $B(u)$ une fonction de $u > 0$ telle que, pour tout n, $B(u)/u^n$ soit croissante et que $B(u) < A(u)$ (par exemple, la fonction associée à une suite $b_n \downarrow 0$ telle que $b_n < a_n$). Choisissons pour $s = s(u)$ le plus grand indice inferieur à $q(n)$ pour lequel $(a_1 \cdots a_s u^s)^{\frac{1}{2}} \leqq B(u)$; alors

$$(19) \qquad (a_{s+1} \cdots a_q u^{q-s})^{-\frac{1}{2}} \leqq B(u) A^{-\frac{1}{2}}(u)$$

et il est clair que $s(u)$ tend vers l'infini quand $u \to \infty$. Imposons maintenant aux k_n, outre les conditions (8) et (9), les conditions suivantes (l prenant toutes les valeurs entières à partir d'un certain rang):

$$C'(l+1) \sum_{s(l)}^{q(l+1)} \frac{a_j k_j}{k_{j+1}} < A^{-\frac{1}{2}}(l+1). \tag{20}$$

Ces conditions sont comptabiles puisque chaque indice j n'y apparait qu'un nombre fini de fois. Compte tenu de (19) et (20), (16) donne

$$\| e^{iuf} \|_\infty \leqq A^{-\frac{1}{2}}(u)(1 + B(u)).$$

Enonçons le résultat.

Théorème 2. *Soit $\{a_n\}$ une suite positive décroissante, telle que $\sum_1^\infty a_n < \infty$, $A(u)$ la fonction associée à cette suite, $B(u)$ une fonction de $u > 0$ croissant plus vite que tout polynome. On peut choisir les entiers k_n de façon que la fonction $f(t) = \sum_1^\infty a_n \Delta(k_n t)$ satisfasse*

$$\| e^{iuf} \|_\infty = O(A^{-\frac{1}{2}}(u) B(u)) \quad (u \to \infty) \tag{21}$$

Remarques sur l'énoncé du théorème 2. 1. On peut remplacer $\Delta(t)$ par toute fonction $D(t)$ telle que $\| e^{iuD} \|_\infty = O(u^{-\frac{1}{2}})$. 2. L'hypothèse $\sum_1^\infty a_n < \infty$ n'est essentielle que pour assûrer $f \in A$; sous les seules conditions (8), (9) et $a_n k_n = o(k_{n+1})$ $(n \to \infty)$, on voit d'après (15) que les e^{iuf_n} ont une limite dans A_∞, qu'on peut désigner par e^{iuf};quand la suite a_n est décroissante et tend vers zéro, on peut encore choisir les k_n de façon que (21) ait lieu.

Soit maintenant T une pseudofonction:

$$T(t) \sim \sum \hat{T}(n) e^{int} \text{ avec } \hat{T}(n) = \underset{n \to \infty}{o(1)}.$$

Nous allons montrer que le théorème 2 vaut encore en remplaçant $\| e^{iuf} \|_\infty$ par $\| T e^{iuf} \|_\infty$.

Posons

$$\varepsilon_k(T) = \sup_{|n| \geqq k/2} |\hat{T}(n)|. \tag{22}$$

Notons que, si T est une pseudofonction, $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k(T) = 0$, et aussi bien, pour toute fonction $\phi \in A$, $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k(T\phi) = 0$. Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 4. *Soit ϕ une fonction de la classe A dont toutes les fréquences sont multiples de k (entier > 0): $\phi(t) = \sum_n \hat{\phi}(kn) e^{iknt}$. Alors*

$$\| T\phi \|_\infty \leqq \| T \|_\infty \| \phi \|_\infty + \varepsilon_k(T) \| \phi \|_1. \tag{23}$$

Démonstration:

$$\widehat{T\phi}(l) = \sum_n \hat{T}(l - kn)\hat{\phi}(kn)$$

et dans le second membre apparait une valeur de n et une seule telle que $-(k/2) \leqq l - kn < k/2$; à cette valeur correspond la majoration $\| T\|_\infty \| \phi \|_\infty$, et à la somme des autres la majoration $\varepsilon_k(T) \| \phi \|_1$.

Conservons les notations (8), (9), (10). Supposons que, $A(u)$ et $B(u)$ étant donnés comme dans le Théorème 2, on a choisi $s = s(u)$ et $q = q(u)$ comme plus haut, de façon que (19) et (20) aient lieu. Remarquons que dans (16) n'interviennent que des a_j et des k_j tels que $j \geqq s$; on peut donc remplacer dans le premier membre e^{iuf} par $e^{iu(f-f_p)}$ dès que

$$p + 1 \leqq s. \tag{24}$$

Nous définirons tout à l'heure p en fonction de u. Comme les fréquences de $e^{iu(f-f_p)}$ sont multiples des k_{p+1} (à cause de (8)), le lemme 4 donne, compte tenu de (19) et (20),

$$\begin{aligned} \| Te^{iuf} \|_\infty &\leqq \| Te^{iuf_p}\|_\infty \| e^{iu(f-f_p)} \|_\infty + \varepsilon_k(Te^{iuf_p}) \| e^{iu(f-f_p)} \|_1 \\ &\leqq \| Te^{iuf_p} \|_\infty A^{-\frac{1}{2}}(u)\ (1 + B(u)) + \varepsilon_k(Te^{iuf_p})e^{u\sum_1^\infty a_n} \end{aligned} \tag{25}$$

dès que $k_{p+1} \geqq k$.

Choisissons maintenant, pour chaque u entier, $p = p(u)$ comme le plus grand entier satisfaisant à la fois (24) et

$$\| T\|_\infty(1 + Ca_1u)\cdots(1 + Ca_pu) \leqq B(u) \left(C = \left(2 \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{26}$$

Il est important de noter que $p(u)$ augmente indéfiniment avec u. Le premier membre de (26) majore $\| Te^{iuf_p}\|_\infty$, quels que soient les k_j, en vertu des estimations suivantes:

$$\| Te^{iuf_p}\|_\infty \leqq \| T\|_\infty \| e^{iua_1\Delta} \|_1 \cdots \| e^{iua_p\Delta} \|_1$$

et, pour chaque ϕ continûment dérivable par morceaux (ici, $\phi = e^{iua_j\Delta}$)

$$\begin{aligned} \| \phi \|_1 = \sum |\hat{\phi}(n)| &\leqq |\hat{\phi}(0)| + C(\sum_{n\neq 0} |n\hat{\phi}(n)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq \| \phi \|_\infty + C \| \phi' \|_2. \end{aligned}$$

On aura donc, quels que soient les k_j,

$$\| Te^{iuf_p} \|_\infty \leqq B(u) \quad (p = p(u)). \tag{27}$$

Ayant choisi $p = p(u)$, on choisit $k = k(u, k_1, \cdots, k_p)$ assez grand pour que

$$\varepsilon_{k(u,k_1\cdots k_p)}(Te^{iuf_p}) e^{u\sum_1^\infty a_n} \leqq A^{-\frac{1}{2}}(u). \tag{28}$$

Si l'on a

$$k_{p+1} \geqq k(u, k_1, \cdots, k_p) \qquad (p = p(u)) \tag{29}$$

les inégalités (25), (27), (28) donnent

$$\| Te^{iuf} \|_\infty \leqq A^{-\frac{1}{2}}(u)\ (1 + B(u) + B^2(u)) \quad (u \text{ entier}).$$

Or, pour p donné, il n'y a qu'un nombre fini d'inégalités (29). Il est donc possible de choisir la suite k_j de façon à satisfaire à la fois aux conditions (8), (9), (20) et (29).

Si u est réel non entier, soit l l'entier immédiatement supérieur, et $v = l - u$. On peut écrire

$$\| Te^{iuf} \|_\infty \leqq \| Te^{ilf} \|_\infty \| e^{-ivf} \|_1$$

d'où

$$\| Te^{iuf} \|_\infty \leqq CA^{-\frac{1}{2}}(u)(1 + B(u+1) + B^2(u+1))$$

avec $C = \sup_{0 \leqq v \leqq 1} \| e^{-ivf} \|_1$.

Enonçons le résultat, en remarquant qu'à toute fonction $B^*(u)$ croissant plus vite que tout polynome on peut associer la fonction $B(u) = \sqrt{B^*(u-1)}$.

THÉORÈME 3. *Soit a_n une suite positive décroissante telle que $\sum_1^\infty a_n < \infty$, $A(u)$ la fonction associée à cette suite, $B^*(u)$ une fonction de $u > 0$ croissant plus vite que tout polynome, et T une pseudofonction. On peut choisir les entiers k_n de façon que la fonction $f(t) = \sum_1^\infty a_n \Delta(k_n t)$ satisfasse*

$$\| Te^{iuf} \|_\infty = O(A^{-\frac{1}{2}}(u) B^*(u)) \qquad (u \to \infty). \tag{30}$$

Le théorème 3 peut se généraliser, en relachant l'hypothèse que T est une pseudofonction.

Etant donné $\lambda > 1$ et $A > 0$, nous noterons $S_{\lambda,A}$ toute partie de la droite réelle qui est réunion infinie de segments de longueur λ dont les distances mutuelles sont minorées par $A\lambda$. Soit T une pseudomesure jouissant de la propriété suivante: pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $A > 0$, il existe un $\lambda > 1$ et un ensemble S du type $S_{\lambda,A}$ tels que

$$|\hat{T}(n)| \leqq \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \notin S. \tag{31}$$

Nous dirons alors que T *satisfait la condition* (P). Evidemment, toute pseudofonction satisfait la condition (P). Autres exemples: les pseudomesures T telles que $\hat{T}(n) = \prod_1^\infty \cos^j a_j n$ $(a_j \geqq 0,\ \sum_1^\infty j\, a_j < \infty)$.

Nous allons donner une autre forme à la condition (P). Lorsque (31) est réalisé, convenons de dire que l'ensemble *S porte T à ε près*, ou encore, que c'est un *ε-porteur* de T. Dire que T satisfait la condition (P), c'est encore dire (en choisissant

$\varepsilon = 1/p$ et $A = 2p$) qu'il existe une suite positive $\{\lambda_p\}$ et des ensembles S_p du type $S_{\lambda_n,2p}$ qui portent T à $1/p$ près; on peut d'ailleurs sans restriction supposer λ_p croissant vers l'infini $(p = 1, 2, \cdots)$.

Nous dirons qu'une suite positive $\{\lambda_p^*\}$ croissant vers l'infini, et une suite d'ensembles $\{S_p^*\}$ sur la droite $(p = 1, 2, \cdots)$ sont associées à T si 1) pour chaque p, S_p^* est du type $S_{\lambda_p^*,p}$ 2) il existe une suite positive $\{\omega_p\}$ tendant vers l'infini et une suite $\{\varepsilon_p\}$ tendant vers zéro telles que, pour tout p, S_p^* est somme directe d'un ε_p-porteur de T, soit $S_p^\bullet$, et de l'intervalle $[-\omega_p, \omega_p]$. Il est clair que toute pseudo-mesure qui admet des suites ainsi associées satisfait la condition (P). Inversement, si T satisfait la condition (P), il suffit de poser $\lambda_p^* = 3\lambda_p$ et $S_p^* = S_p + [-\lambda_p, \lambda_p]$ pour avoir des suites associées à T.

LEMME 5. *Si T satisfait la condition (P) et admet $\{\lambda_p^*\}$ et $\{S_p^*\}$ comme suites associées, il en est de même pour $T\psi$, quelle que soit la fonction ψ de la classe A.*

Démonstration. Considérons les suites ω_p, ε_p et $S_p^\bullet$. intervenant dans la définition des suites associées. Soit ϖ_p une suite d'entiers tendant vers l'infini, $\varpi_p < \frac{1}{2}\omega_p$, et ψ_p la somme de Fourier d'ordre ϖ_p de ψ; on a

$$\| T\psi - T\psi_p \|_\infty \leqq \| T \|_\infty \| \psi - \psi_p \|_1 = \eta_p.$$

Soit T_p la restriction de T à $S_p^\bullet$; on a

$$\| T\psi_p - T_p\psi_p \|_\infty \leqq \| T - T_p \|_\infty \| \psi_p \|_1 \leqq \varepsilon_p \| \psi \|_1$$

et le support de $T_p\psi_p$ est contenu dans la somme directe $S_p^\bullet + [-\varpi_p, \varpi_p]$. En posant $\omega_p' = \frac{1}{2}\omega_p$ et $\varepsilon_p' = \eta_p + \varepsilon_p \| \psi \|_1$, on voit que $\{\lambda_p^*\}$ et $\{S_p^*\}$ sont bien associées à $T\psi$. Le lemme 5 est démontré.

LEMME 6. *Si T satisfait la condition (P) et admet les suites $\Lambda = \{\lambda_p^*\}$ et $\{S_p^*\}$ comme suites associées, et si $\psi \in A$, on a*

$$\lim_{p \to \infty} \| T(t)\psi(\lambda_p^* t) \|_\infty = \| T \|_\infty \| \psi \|_\infty. \tag{32}$$

Démonstration. Le coefficient de Fourier d'ordre l de $T(t)\psi(\lambda t)$ est

$$\sum_{|n| \leqq q/2} \hat{T}(l - \lambda n)\hat{\psi}(n) + \sum_{|n| > q/2} \hat{T}(l - \lambda n)\hat{\psi}(n). \tag{33}$$

Prenons $\lambda = \lambda_p^*$ avec $p > q$. Dans la première somme, tous les termes, sauf au plus un, sont majorés en module par $\varepsilon_p \|\psi\|_\infty$; le terme exceptionnel est majoré par $\| T \|_\infty \| \psi \|_\infty$ et, par un choix convenable de q et l, en est aussi voisin que l'on veut. La seconde somme est majorée par $\| T \|_\infty \sum_{|n| > q/2} |\hat{\psi}(n)|$. Quitte à choisir d'abord q assez grand, puis p assez grand (fonction de q), $\| T(t)\psi(\lambda_p^* t) \|_\infty$ est donc aussi voisin qu'on veut de $\| T \|_\infty \| \psi \|_\infty$. Le lemme 6 est démontré.

Nous pouvons maintenant établir:

THÉORÈME 4. *L'énoncé du théorème 3 reste valable, en supposant, non pas que T soit une pseudofonction, mais que T soit une pseudomesure satisfaisant la condition* (P).

Démonstration. Il suffira, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 3, d'avoir la majoration asymptotique (30) lorsque u est entier, quitte à remplacer $B^*(u)$ par $B(u) = B^*(u-1)$. On conserve encore les notations et conventions (8), (9), (10). On définit maintenant $s = s(u)$ comme le plus grand indice infèrieur à $q(n)$ pour lequel

$$\| T\|_{\infty}(1 + Ca_1u)\cdots(1 + Ca_su)(a_1 \cdots a_su^s)^{\frac{1}{2}} \leqq B(u) \tag{34}$$

($C = (2\sum_1^{\infty} 1/n^2)^{\frac{1}{2}}$). De nouveau, $s(u)$ augmente indéfiniment avec u, et (34) assure que, quels que soient les k_j,

$$\| Te^{iuf_s}\|_{\infty}(a_1 \cdots a_su^s)^{\frac{1}{2}} \leqq B(u). \tag{35}$$

Soit Λ (comme dans le lemme 6) une suite associée à T, donc (lemme 5) à tout produit $T\psi$, où $\psi \in A$. On choisira les entiers k_j dans la suite Λ de la manière suivante: $k_1, \cdots, k_n$ étant choisis, on choisit (ce qui est possible d'après les lemmes 5 et 6) k_{n+1} de façon que, en posant $T_{n,u} = Te^{iuf_n}$ et $\psi_{n+1,u} = e^{iua_{n+1}\Delta}$, on ait

$$\| T_{n+1,u}\|_{\infty} \leqq \| T_{n,u}\|_{\infty}\, \| \psi_{n+1,u}\|_{\infty}\ (1 + 2^{-n}) \tag{36}$$

pour toutes les valeurs de u entier telles que $n \geqq s(u)$. Il suit de (36) que

$$\| Te^{iuf}\|_{\infty} \leqq 2\| Te^{iuf_s}\|_{\infty} \prod_s^{\infty} \| \psi_{s+1,u}\|_{\infty}. \tag{37}$$

Or, compte tenu du lemme 1, on a

$$\prod_s^{\infty} \| \psi_{s+1,u}\|_{\infty} \leqq (a_1 \cdots a_su^s)^{+\frac{1}{2}}(A(u))^{-\frac{1}{2}} \tag{38}$$

$$\| Te^{iuf}\|_{\infty} \leqq 2(A(u))^{-\frac{1}{2}}B(u)$$

ce qui achève la démonstration du théorème 4.

Comme conséquence du théorème 4, on a:

THÉORÈME 5. *Si l'ensemble fermé E porte une pseudomesure non nulle satisfaisant la condition* (P), *il n'est pas de résolution.*

Il suffit en effet d'appliquer la proposition suivante de Malliavin [12]:

PROPOSITION 2. *Supposons* $f \in A_{\log}$, *c'est a dire* $\sum |\hat{f}_n| \log |1/\hat{f}_n| < \infty$, f *réelle*, $T \in A_{\infty}$, *et*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|\ \| Te^{iuf}\|_{\infty} du < \infty.$$

Alors l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} iu\, T(t)\, e^{iu(f(t)-a)} du,$$

convergente dans A_∞, définit pour tout a réel une pseudomesure h_a, portée par l'ensemble des zéros de $f(t) - a$ et par le support de T, et telle que, pour une infinité de valeurs de a,

$$\int h_a(t)(f(t) - a)dt \neq 0.$$

L'intérêt du théorème 5 est qu'il s'applique à certains ensembles d'unicité—c'est à dire ne portant aucune pseudofonction $\neq 0$—. Il existe donc des ensembles d'unicité qui ne sont pas ensembles de synthèse. Nous allons retrouver ce résultat par une autre voie.

Nous dirons qu'une pseudomesure T *satisfait la condition* (Q) si quels que soient les entiers positifs J et N, et $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k = k(J, N, \varepsilon)$ avec la propriété suivante: quel que soit l'entier l

$$|\hat{T}(nk + l + j)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |j| \leqq J, \quad |n| \leqq N, \quad n \neq n_l \tag{39}$$

n_l étant un entier dépendant de l. Toute pseudofonction satisfait la condition (Q). D'autre part, nous verrons tout à l'heure que la mesure naturelle construite sur l'ensemble de Cantor (qui n'est pas une pseudofonction, et ne satisfait pas non plus la condition (P)), satisfait la condition (Q).

Nous allons démontrer, par une méthode indépendante, un résultat analogue au théorème 5.

THÉORÈME 6. *Si l'ensemble fermé E porte une mesure μ non nulle satisfaisant la condition* (Q), *il n'est pas de résolution.*

Démonstration. Il suffit, d'après la proposition 2, de construire une $f \in A_{\log}$ réelle, telle que $\| \mu e^{iuf} \|_\infty = O(u^{-\alpha})$ avec $\alpha > 2$. Nous définirons f par

$$f(t) = \sum_1^\infty a_n \Psi(k_n t)$$

avec $a_n = 2^{-2^n}$, et $\Psi \in A_{\log}$, Ψ réelle, telle que

$$\| e^{iu\Psi} \|_\infty < u^{-4\alpha} \quad \text{pour} \quad u > 1 \tag{40}$$

(on a mis en évidence de telles fonctions Ψ en démontrant le théorème 1); les k_n seront choisis dans la suite.

Soit $2^{2^m} \leqq u < 2^{2^{m+1}}$; alors

$$\left\| u \sum_{m+1}^{\infty} a_n \Psi(k_n t) \right\|_1 \leqq 2 \| \Psi \|_1$$

$$\left\| \exp(iu \sum_{m+1}^{\infty} a_n \Psi(k_n t) \right\|_1 \leqq \exp(2 \| \Psi \|_1) = C$$

et par conséquent

$$\| \mu e^{iuf} \|_\infty \leqq C \| \mu e^{iuf_m} \|_\infty \tag{41}$$

en posant $f_m(t) = \sum_1^m a_n \Psi(k_n t)$.

Supposons, pour simplifier les écritures, que μ soit de masse totale 1; alors

$$\| \mu e^{iuf_m} \|_\infty \leqq 1 \text{ quel que soit } u. \tag{42}$$

Nous allons démontrer par récurrence qu'on peut choisir les entiers k_n de façon que

$$\| \mu e^{iuf_m} \|_\infty \leqq \begin{cases} 3u^{-\alpha} & \text{pour } \quad 2^{2^m} \leqq u < 2^{2^{m+2}} \\ 2u^{-\alpha} & \text{pour } \quad 2^{2^{m+1}} \leqq u < 2^{2^{m+1}}. \end{cases} \tag{43}$$

Supposons donc qu'on ait pu choisir $k_1, \cdots, k_m$ de façon que (43) ait lieu; nous allons montrer qu'on peut choisir $k = k_{m+1}$ de façon à avoir

$$\| \mu e^{iuf_{m+1}} \|_\infty \leqq \begin{cases} 3u^{-\alpha} \text{ pour } 2^{2^{m+1}} \leqq u < 2^{2^{m+2}} \\ 2u^{-\alpha} \text{ pour } 2^{2^{m+2}} \leqq u < 2^{2^{m+3}} \end{cases} \tag{44}$$

Posons $\phi_u = e^{iuf_m}$ et démontrons d'abord le lemme suivant

LEMME 7. *Soit N un entier positif, $u_0 > 0$, $\varepsilon > 0$. Il existe un entier positif k tel que, quel que soit l'entier l,*

$$| \widehat{\mu\phi_u}(nk + l) | < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad 0 < u < u_0, \quad |n| \leqq N, \quad n \neq n_l \tag{45}$$

n_l étant un entier dépendant de l.

En effet, on peut attacher à ε et u_0 un entier J tel que

$$\sum_{|j|>J} | \hat{\phi}_u(j) | < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } 0 < u < u_0.$$

Alors, en posant $\phi_u^*(t) = \sum_{|j| \leqq J} \hat{\phi}_u(j) e^{ijt}$, on a

$$\| \mu\phi_u - \mu\phi_u^* \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } 0 < u < u_0. \tag{46}$$

Or

$$\widehat{\mu\phi_u^*}(nk + l) = \sum_{|j| \leqq J} \hat{\mu}(nk + l + j) \hat{\phi}_u(-j) \tag{47}$$

et $|\hat{\phi}_u|$ est majoré par 1. Comme μ satisfait la condition (Q), on peut choisir $k = k(J, N, \varepsilon/(4J+2))$ de façon que (voir (39))

$$|\hat{\mu}(nk + l + j)| < \frac{\varepsilon}{4J+2} \text{ pour } |j| \leqq J, \quad |n| \leqq N, \quad n \neq n_l$$

ce qui, joint à (46) et (47), donne (45); le lemme est ainsi démontré.

Posons maintenant $\psi_u = e^{iua_{m+1}\Psi}$. Soit $u_0 = 2^{2^{m+3}}$ et $\varepsilon' = \frac{1}{2}u_0^{-\alpha}$. Choisissons N de façon que

$$(48) \qquad \sum_{|n|>N} |\hat{\psi}_u(n)| < \varepsilon' \text{ pour } 0 < u < u_0.$$

Posons $\varepsilon = \varepsilon'/2N$, et définissons $k_{m+1} = k$ par le lemme 7. Le coefficient de Fourier d'ordre l de $\mu e^{iuf_{m+1}}$ est

$$d_l = \sum \hat{\psi}_u(-n)\widehat{\mu\phi_u}(nk + l).$$

Or, d'après (42) et (48), on a

$$\sum_{|n|>N} |\hat{\psi}_u(-n)\widehat{\mu\phi_u}(nk + l)| < \varepsilon' \text{ pour } 0 < u < u_0$$

et d'après (45), compte tenu de $\|\psi_u\|_\infty \leqq 1$,

$$\sum_{|n| \leqq N_0,\, n \neq n_l} |\hat{\psi}_u(-n)\widehat{\mu\phi_u}(nk + l)| < 2N\varepsilon \text{ pour } 0 < u < u_0;$$

enfin

$$|\hat{\psi}_u(-n_l)\widehat{\mu\phi_u}(n_lk + l)| \leqq \|\psi_u\|_\infty \, \|\mu\phi_u\|_\infty.$$

Le choix de ε et ε' donne donc, quel que soit l'entier l,

$$(49) \qquad |d_l| \leqq u_0^{-\alpha} + \|\psi_u\|_\infty \, \|\mu\phi_u\|_\infty \text{ pour } 0 < u < u_0.$$

Considérons maintenant tour à tour les cas

$$\text{(i)} \qquad 2^{2^{m+1}} \leqq u < 2^{2^{m+2}} \qquad \text{(ii)} \quad 2^{2^{m+2}} \leqq u < 2^{2^{m+3}} = u_0.$$

Dans le cas (i), l'hypothèse (43) dit que $\|\mu\phi_u\|_\infty \leqq 2u^{-\alpha}$, ce qui, joint à $\|\psi_u\|_\infty \leqq 1$ et à (49), donne

$$(50) \qquad |d_l| \leqq 3u^{-\alpha}.$$

Dans le cas (ii), l'hypothèse (40) dit que $\|\psi_u\|_\infty \leqq (ua_{m+1})^{-4\alpha}$, d'où

$$\|\psi_u\|_\infty \leqq (2^{2^{m+1}})^{-4\alpha} = u_0^{-\alpha}$$

ce qui, joint à $\|\mu\phi_u\|_\infty \leqq 1$ (voir (42)), donne

$$(51) \qquad |d_l| \leqq 2u^{-\alpha}.$$

Moyennant (43), on a donc pu choisir k_{m+1} de façon que (44) ait lieu. Compte tenu de (41), cela entraine que la fonction

$$f(t) = \sum_1^\infty a_n \Psi(k_n t)$$

satisfait

$$\| \mu e^{iuf} \|_\infty = O(u^{-\alpha}) \quad (u \to \infty).$$

Comme $f \in A_{\log}$, la démonstration du théorème 6 est achevée.

Le théorème 6 va nous permettre de montrer que l'ensemble triadique de Cantor n'est pas un ensemble de résolution.

On appelle généralement *ensemble parfait symétrique* tout ensemble E de points de la forme

$$a_0 \pm a_1 \pm a_2 \cdots \pm a_n \pm \cdots$$

où les a_j sont des nombres donnés (a_0 réel, $a_j > 0$ pour $j \geqq 1$ et $\sum_1^\infty a_j < \infty$), et où les $\pm$ représentent arbitrairement, et indépendamment les uns des autres, le signe $+$ ou le signe $-$.

La mesure "naturelle" sur E (celle qui attribue des masses égales à des portions égales) a pour transformée de Fourier (si sa masse totale est 1)

$$\hat{\mu}(u) = e^{iua_0} \prod_1^\infty \cos a_j u.$$

THÉORÈME 7. *Aucun ensemble parfait symétrique n'est ensemble de résolution.*

Démonstration. On va montrer que la mesure naturelle construite sur E satisfait la condition (Q). Sans inconvénient, on peut supposer $a_0 = 0$, et, quitte à restreindre l'ensemble en fixant certains coefficients $\pm$ (ce qui revient à supprimer des éléments de la suite $\{a_j\}$, et à modifier a_0), on pourra supposer sur les a_j telle condition de décroissance qui nous conviendra.

Soit P_ε l'ensemble des u réels tels que $|\hat{\mu}(u)| \geqq \varepsilon$. Si μ ne satisfait pas la condition (Q), il existe des entiers positifs J et N, et un $\varepsilon > 0$, tels que pour tout entier k positif, on puisse trouver un entier l, des entiers n_1 et n_2 de modules inférieurs à N et des entiers j_1 et j_2 de modules inférieurs à J tels que

$$n_1 k + l + j_1 \in P_\varepsilon, \quad n_2 k + l + j_2 \in P_\varepsilon;$$

il s'ensuit que

$$(n_1 - n_2) k \in P_\varepsilon - P_\varepsilon + [-2J, 2J]$$

où le second membre représente une somme directe. Donc, pour que μ satifasse la condition (Q), il suffit qu'elle satisfasse la condition (Q'): quel que soit le choix de J, N, ε, il existe un entier k tel que

$$nk \notin P_\varepsilon - P_\varepsilon + [-2J, 2J] \text{ pour } n \text{ entier, } |n| \leqq 2N, \ n \neq 0.$$

Notons $P_{\varepsilon,\kappa}$ l'ensemble des u réels tels que $\prod_\kappa^\infty |\cos a_j u| > \varepsilon$. Comme la dérivée de $\prod_\kappa^\infty \cos a_j u$ ne dépasse pas $\rho_\kappa = \sum_\kappa^\infty a_j$,

$$P_{\varepsilon,\kappa} + [-J, J] \subset P_{\varepsilon/2,\kappa}$$

pourvu que $J\rho_\kappa < \varepsilon/2$. Etant donné J et ε, nous choisirons κ pour qu'il en soit ainsi. Il s'agit donc de montrer que, étant donné N, ε, κ, il existe un entier k tel que

$$nk \notin P_{\varepsilon/2,\kappa} - P_{\varepsilon/2,\kappa} \text{ pour } n = 1, 2, \cdots, 2N. \tag{52}$$

Fixons une fois pour toute un α entre 0 et $\pi/12$. Soit ν un entier tel que

$$\cos^\nu \alpha < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{53}$$

Si $u \in P_{\varepsilon/2,\kappa}$, il existe au plus ν valeurs de $j > \kappa$ telles que $|\cos a_j u| \leqq \cos\alpha$; autrement dit,

$$|\cos a_j u| > \cos\alpha \quad \text{et} \quad |\sin a_j u| < \sin\alpha$$

pour tous les entiers $j > \kappa$ sauf au plus ν valeurs. Si u et v appartiennent à $P_{\varepsilon/2,\kappa}$, on a donc

$$|\sin a_j u| < \sin\alpha \quad \text{et} \quad |\sin a_j v| < \sin\alpha$$

d'où $|\sin a_j(u - v)| < 2\sin\alpha$ pour tous les $j > \kappa$ sauf au plus 2ν valeurs. Ainsi, quels que soient les entiers $\kappa_n > \kappa$ et $\lambda > 2\nu$, si l'on pose

$$S_n(w) = \prod_{\kappa_n}^{\kappa_n+\lambda} \sin a_j w$$

on a

$$|S_n(w)| < (2\sin\alpha)^{\lambda-2\nu} \quad \text{si} \quad w \in P_{\varepsilon/2,\kappa} - P_{\varepsilon/2,\kappa}. \tag{54}$$

Si les a_j sont assez rapidement décroissants (il suffit que toutes les sommes finies de la forme $\pm a_1 \pm a_2 \cdots \pm a_m$ soient distinctes), la moyenne quadratique de $S_n(w)$ est $2^{-\lambda/2}$. Supposons λ choisi de sorte que

$$(2\sin\alpha)^{\lambda-2\nu} < \frac{1}{2}2^{-\lambda/2}. \tag{55}$$

Il existe alors un $T = T_n$ tel que, sur tout intervalle I_n de longueur T_n, la moyenne quadratique de $S_n(w)$ dépasse $2(2\sin\alpha)^{\lambda-2\nu}$; à fortiori, il existe sur un tel intervalle un w tel que $S_n(w) > 2(2\sin\alpha)^{\lambda-2\nu}$ et, comme la dérivée de $S_n(w)$ ne dépasse pas ρ_{κ_n}, I_n contient un intervalle θ_n de longueur $|\theta_n| = \rho_{\kappa_n}^{-1}(2\sin\alpha)^{\lambda-2\nu}$ tel que

$$|S_n(w)| > (2\sin\alpha)^{\lambda-2\nu} \text{ si } w \in \theta_n. \tag{56}$$

Montrons maintenant que, étant donné, N, ε, κ, il existe un entier k tel qu'on ait (52). On définit ν et λ de façon à avoir (53) et (55). Il suffit, d'après (54), de définir des entiers k, κ_1, $\kappa_2, \cdots \kappa_{2N}$ tels que

$$(57) \qquad |S_n(nk)| > (2\sin\alpha)^{\lambda-2\nu} \text{ pour } n = 1,2,\cdots,2N.$$

Pour cela, on choisit κ_1 de façon que $|\theta_1| > 1$ (ainsi chaque intervalle θ_1 contient au moins un entier), puis κ_2 de façon que

$$\frac{1}{2}|\theta_2| > 2T_1$$

(ainsi chaque intervalle $\theta_2/2$, homothétique de θ_2 par rapport à 0 dans le rapport $\frac{1}{2}$, contient un intervalle I_1, donc un intervalle θ_1), puis κ_3 de façon que

$$\frac{1}{3}|\theta_3| > \frac{1}{2}2T_2$$

(ainsi chaque intervalle $\theta_3/3$ contient un intervalle $\theta_2/2$) et ainsi de suite. Les κ_n étant ainsi choisis, on définit à partir de $n = 2N$ des intervalles θ_n sur lesquels on a (56), chaque θ_n/n contenant $\theta_{n-1}/(n-1)$. L'intervalle θ_1, commun à tous les θ_n/n, contient un entier k en lequel on a (57), et cela achève la démonstration du théorème 7.

Deuxième partie

E étant une partie compacte du cercle, on désigne par $A(E)$ l'ensemble des restrictions à E des fonctions de la classe A. $A(E)$ est munie d'une structure d'algèbre de Banach, comme quotient de l'algèbre A par l'idéal des fonctions de la classe A s'annulant sur E.

Dans tout ce qui suit, F est une fonction, définie sur l'intervalle $]-1,1[$, qui opère dans $A(E)$, et $N(R)$ la fonction de croissance exponentielle imaginaire dans $A(E)$, définie par

$$(58) \qquad N(R) = \sup_{\|f\| \leqq R,\, f \text{ réelle}} \| e^{if} \|_E$$

les normes étant prises dans $A(E)$. L'intérêt de considérer cette fonction apparait dans le théorème suivant.

Théorème 8. *Si, pour un $a > 0$, $N(R) \geqq e^{aR}$ $(R > 0)$ toute fonction F qui opère dans $A(E)$ est analytique.*

La démonstration se fonde sur les lemmes suivants.

Lemme 8. *Soit x_0 un point d'accumulation de E et $K > 0$; il existe des nombres positifs ε et η tels que, si $f \in A(E)$ est une fonction réelle satisfaisant*

$$\text{(59)} \qquad \begin{cases} \text{Support } f \subset V_\eta = E \cap \,]x_0 - \eta,\ x_0 + \eta[\\ \|f\|_E < \varepsilon \end{cases}$$

on ait

$$\text{(60)} \qquad \| F(f) \|_E < K.$$

Démonstration du lemme. On peut supposer $x_0 = 0$ et (quitte à remplacer $F(x)$ par $F(x) - F(0)$) $F(0) = 0$. Montrons d'abord l'existence de ε et η tels que (59) implique (60) pour toute f qui s'annule au voisinage de x_0. Supposons, par l'absurde, que ε et η n'existent pas. On peut alors définir par récurrence une suite de nombres réels η_n et une suite $\phi_n \in A(E)$ tels que

$$\text{(61)} \qquad \| \phi_n \|_E < 2^{-n}, \qquad \| F(\phi_n) \|_E > K$$

$$\text{(62)} \qquad \text{Support } \phi_n \subset V_{\eta_n}, \quad \phi_n = 0 \text{ sur } [-2\eta_{n+1}, 2\eta_{n+1}].$$

Pour tout $\xi > 0$ désignons par Δ_ξ la fonction de la classe A, paire, égale à 1 entre 0 et ξ, linéaire entre ξ et 2ξ, nulle sur $[2\xi, \infty[$. On a $\| \Delta_\xi \|_1 < 3$, et il est bien connu que, si $f \in A$, $f(0) = 0$, on a

$$\lim_{\xi \to 0} \|f \Delta_\xi\|_1 = 0.$$

Par conséquent, si $f \in A(E)$ et $f(0) = 0$, on a $\lim_{\xi \to 0} \|f \Delta_\xi\|_E = 0$ (la norme étant prise dans $A(E)$) et, sous la seule hypothèse $f \in A(E)$, on a

$$\text{(63)} \qquad \limsup_{\xi \to 0} \|f \Delta_\xi\|_E < 3\,|f(0)|.$$

Posons maintenant $\phi = \sum_1^\infty \phi_n$ et $\Phi = F(\phi)$. D'après (61), $\phi \in A(E)$, donc $\Phi \in A(E)$, et de plus $\Phi(0) = 0$. D'après (63), $\lim_{n \to \infty} \|f \Delta_{\eta_n}\|_E = 0$. Or, d'après (62), $F(\phi_n) = (\Delta_{\eta_n} - \Delta_{\eta_{n+1}})\Phi$, donc $\lim_{n \to \infty} \| F(\phi_n) \|_E = 0$, contrairement à (61). Pour tout $K > 0$, on peut donc trouver $\varepsilon = \varepsilon_K > 0$ et $\eta = \eta_K > 0$ tels que (59) implique (60) pour toute f nulle au voisinage de $x_0 = 0$.

E étant un ensemble infini, la fonction F est continue. Choisissons maintenant $\varepsilon > 0$ de sorte que

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\varepsilon_{K/5} \quad \text{et} \quad \sup_{|x| < \varepsilon} |F(x)| < \frac{K}{15}$$

et $\eta = \eta_K$. Considérons une $f \in A(E)$ satisfaisant (59). On a

$$F(f) = F(f)(1 - \Delta_\xi) + F(f)\Delta_\xi$$
$$F(f)(1 - \Delta_\xi) = F(f(1 - \Delta_{\xi/2}))(1 - \Delta_\xi)$$

puisque $F(f)$ et $F(f(1 - \Delta_{\xi/2}))$ ne diffèrent que dans l'intervalle $[-\xi, \xi]$ où $1 - \Delta_\xi$ est nulle. Comme $f(1 - \Delta_{\xi/2})$ s'annule au voisinage de 0 et que sa norme ne dépasse pas $4\|f\|_E < 4\varepsilon < \varepsilon_{K/5}$, on a

$$\| F(f(1 - \Delta_{\xi/2})) \|_E < \frac{K}{5}$$

d'où (quel que soit ξ)

$$\| F(f)(1 - \Box_\xi) \|_E < \frac{4K}{5}$$

D'autre part, d'après (63), on peut choisir ξ assez petit pour que

$$\| F(f)\Box_\xi \|_E < 3 \,|\, F(f(0)) \,| < \frac{K}{5}.$$

Il en résulte bien $\| F(f) \|_E < K$, et le lemme est démontré.

LEMME 7. *E étant donné, il existe deux nombres positifs ε et K tels que, si $f \in A(E)$, f réelle, $\|f\|_E < \varepsilon$, alors $\| F(f) \|_E < K$.*

C'est un corollaire du lemme 8 au moyen d'un résultat connu sur la continuité de l'opération $f \to F(f)$ [8, p. 88, lemme 3.1].

Remarquons que les lemmes 8 et 9 restent valables si l'on remplace $A(E)$ par une algèbre de Banach régulière sans idéaux primaires contenant, pour chaque point x de son spectre E, et pour chaque voisinage V de x, une fonction ϕ de norme inférieure à un nombre dépendant de x, mais non de V, ϕ ayant son support dans V et étant égale à 1 dans un voisinage de x.

Pour démontrer le théorème 8, il suffit de prouver que F est analytique à l'origine.

D'après le lemme 7, si l'on choisit $\alpha > 0$ assez petit, la fonction $F_1(x) = F(\alpha \sin x)$, qui opère, elle aussi, dans $A(E)$, reste bornée (en norme) dans le cylindre

$$\{f + t;\ \|f\|_E < 1,\ \ |t| \leqq \pi\}. \tag{64}$$

Les coefficients de Fourier de F_1 satisfont

$$\hat{F}_1(n)e^{inf} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_1(f + t)e^{-int}dt \tag{65}$$

pour toute $f \in A(E)$ telle que $F_1(f + t)$ soit intégrable en tant que fonction de t à valeurs vectorielles. En particulier, (65) a lieu si f est une combinaison linéaire finie d'idempotents de $A(E)$.

Si E est de mesure positive, on sait déjà que seules les fonctions analytiques opèrent [8, p. 118, théorème II 4]. Sinon, on sait que les idempotents engendrent A_E [10]. Etant donné n entier et $\varepsilon > 0$, il existe donc une fonction $f \in A(E)$, réelle, combinaisons linéaire finie d'idempotents, telle que

$$\|f\|_E \leqq 1 \text{ et } \| e^{inf} \|_E \geqq e^{a|n|} - \varepsilon^{-1}. \tag{66}$$

Appliquant (65) et (66), on obtient

$$|\, \hat{F}_1(n) \,| \leqq K(e^{a|n|} - \varepsilon)$$

K étant la borne supérieure de $\| F(g) \|_E$ quand g appartient au cylindre (64).

Cela implique l'analyticité de F_1, donc l'analyticité à l'origine de F, qu'il fallait démontrer. Cela achève la démonstration du théorème 8.

Comme application du théorème 8, nous allons donner un critère plus explicite pour que toute fonction F qui opère dans $A(E)$ soit analytique.

Nous dirons que E *satisfait la condition* (R) si, quel que soit N, il existe une mesure T portée par E et un entier positif λ tels que

$$\sup_{p} \sum_{|m|\leqq N} |\hat{T}(p-m\lambda)| \leqq K \| T\|_\infty \tag{67}$$

K ne dépendant que de E.

Nous vérifierons plus loin que E satisfait la condition (R) dès que l'une des conditions suivantes est réalisée:

a) E contient des progressions arithmétiques arbitrairement riches

b) E contient des mailles arbitrairement riches (voir introduction)

c) E est "ensemble de multiplicité au sens strict", c'est à dire qu'il porte une mesure pseudofonction non nulle

d) plus généralement, E porte des mesures T telles que le rapport $\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{T}(n)|/\sup_n |\hat{T}(n)|$ soit arbitrairement petit.

THÉORÈME 9. *Si E satisfait la condition* (R), *toute fonction F, définie sur* $]-1,1[$, *opérant dans $A(E)$, est analytique.*

La démonstration se fait en trois étapes.

LEMME 8. *La condition* (R) *entraine la suivante*: (R_1) *pour toute $\phi \in A$, il existe une mesure T portée par E et un entier positif λ tels que*

$$\hat{T}(0) = 1, \quad \| T(t)\phi(\lambda t)\|_\infty \leqq 3K \|\phi\|_\infty. \tag{68}$$

En effet, le p-ième coefficient de Fourier de $T(t)\phi(\lambda t)$ est

$$\sum_m \hat{\phi}(m)\hat{T}(p-m\lambda) = \sum_{|m|>N} + \sum_{|m|\leqq N}$$

et l'on a

$$\Big|\sum_{|m|>N}\Big| \leqq \|T\|_\infty \sum_{|m|>N} |\hat{\phi}(m)|$$

$$\Big|\sum_{|m|\leqq N}\Big| \leqq \|\phi\|_\infty \sum_{|m|\leqq N} |\hat{T}(p-m\lambda)|.$$

On peut choisir N de sorte que

$$\sum_{|m|>N} |\hat{\phi}(m)| \leqq K \|\phi\|_\infty$$

puis T et λ de façon à avoir (67), et enfin, quitte à multiplier $T(t)$ par une exponentielle convenable, on a $|\hat{T}(0)| \geqq (2/3)\|T\|_\infty$ et l'on peut, sans restriction, prendre $\hat{T}(0) = 1$.

LEMME 9. *Soit* $a < (2/\pi^2)\log(\pi/2)$. *Pour tout* R *assez grand, il existe une* $f \in A$ *réelle, de norme* R, *telle que* $\| e^{if} \|_\infty \leqq e^{-aR}$.

Démonstration. Soit $R > \pi^2/2$, $q = [2R/\pi^2]$ et $u = 2R/\pi^2 q$; alors $1 < u < 2$. Choisissons les k_j $(j = 1, 2, \cdots, q)$ de telle sorte que

$$2C' \sum_1^q \frac{k_j}{k_{j+1}} < \left(\frac{2}{\pi}\right)^q$$

C'étant la constante absolue figurant dans l'inégalité (16), et posons

$$f(t) = u \sum_1^q \Delta(k_j t)$$

Il résulte de (16) que

$$\| e^{if} \|_\infty \leqq 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^q \leqq \pi \exp\left(-\frac{2R}{\pi^2}\log\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où le résultat.

LEMME 10. *Sous la condition* (R_1), $N(R) \geqq e^{aR}$ *dès que* $a < (2/\pi^2)\log(\pi/2)$, *et que* R *est assez grand.*

C'est là le point essentiel. Choisissons f comme dans lemme 9. Pour taote mesure T portée par E et tout λ entier, on a (dans la notation de l'introduction)

$$|\hat{T}(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int T(t)e^{if(\lambda t)}e^{-if(\lambda t)}dt\right| \leqq \| T(t)e^{if(\lambda t)} \|_\infty \| e^{-if(\lambda t)} \|_E.$$

Choisissons $\phi = e^{if}$, puis T et λ de façon à satisfaire (68). On obtient

$$\| e^{-if(\lambda t)} \|_E \geqq \frac{1}{3K} \| e^{if} \|_\infty^{-1}$$

Comme $\|f(\lambda t)\|_E \leqq R$ et $\| e^{if} \|_\infty \leqq e^{-a'R}$ avec $a < a' < (2/\pi^2)\log(\pi/2)$ quand R est assez grand, on a

$$N(R) \geqq \frac{1}{3K}e^{a'R} \geqq e^{aR}$$

quand R est assez grand, et le lemme est établi.

Du théorème 8 résulte immédiatement le théorème 9.

Remarquons que le condition (R) est satisfaite dès que la suivante est réalisée: (R'): quels que soient N entier et $\varepsilon > 0$, il existe une mesure T portée par E et un entier positif λ tels que $\| T \|_\infty = 1$ et que, pour tout p, on ait

$$|\hat{T}(p - m\lambda)| < \varepsilon$$

pour $m = 0, \pm 1, \cdots \pm N$ sauf peut-être pour une valeur de m.

A son tour, (R′) résulte de

(R″): quels que soient N entier et $\varepsilon > 0$, il existe une mesure T portée par E et un entier positif λ tels que, en désignant par $E_\varepsilon(T)$ l'ensemble des entiers n tels que $|\hat{T}(n)| > \varepsilon$, aucun des $m\lambda$ ($m = \pm 1, \cdots, \pm 2N$) n'appartienne à l'ensemble $E_\varepsilon(T) - E_\varepsilon(T)$.

La fin de la démonstration du théorème 7 (à partir de (52)) montre que, si E contient des mailles arbitrairement riches, la condition (R′) est satisfaite, donc E satisfait la condition (R), comme annoncé plus haut. D'autre part, si, pour chaque $\varepsilon > 0$, E porte une mesure T telle que $\| T\|_\infty = 1$ et $\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{T}(n)| < \varepsilon$, il satisfait encore la condition (R′), puisque pour la mesure T considérée, $E_\varepsilon(T)$ est borné.

REFERENCES

1. Ditkin V. A., On the structure of ideals in certain normed rings, *Učenye Zapiski Moskv. Gos. Univ. Mat.*, **30**, 83–130, (1939).

2. Herz, C. Spectral synthesis for the Cantor set, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, **42**, 42–43, (1956).

3. Herz, C., The spectral theory of bounded functions, *Trans. Am. Math. Soc.*, **94**, 181–232, (1960).

4. Kahane, J.-P., Sur un théorème de Paul Malliavin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248**, 2943–2944, (1959).

5. Kahane, J.-P. and Katznelson, Y., Sur la réciproque du théorème de Wiener-Lévy *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248**, 1279–1281, (1959).

6. Kahane, J.-P. and Salem, R., Sur les ensembles linéaires ne portant pas de pseudo-mesures, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **243**, 1185–1187, (1956).

7. Katznelson, Y., Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **247**, 404–406, (1958).

8. Katznelson, Y., Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach, *Ann. Sci. Ecole Normale* Sup. 76, 83–127, (1959).

9. Katznelson, Y., Calcul symbolique dans les algèbres homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254**, 2700–2702, (1962).

10. Katznelson, Y. and Rudin, W., The Stone-Weierstrass property in Banach algebras, *Pac. J. Math.*, **11**, 253–265, (1961).

11. Malliavin, P., Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248**, 1756–1759, (1959).

12. Malliavin, P., Ensembles de résolution spectrale, Congrès Int. Stockholm, (1962).

13. Mandelbrojt, S. et Agmon, S., Une généralisation du théorême Tauberien de Wiener,, *Acta Szeged*, **12**, 157–176, (1950).

14. Pollard, H., The harmonic analysis of bounded functions, *Duke Math. J.*, **20**, 499–512 (1953).

15. Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Cambridge, (1959).

UNIVERSITE DE PARIS
ET
UNIVERSITE HEBRAIQUE DE JERUSALEM